MINISTERIUM FÜR KULTUS, JUGEND UND SPORT
BADEN-WÜRTTEMBERG

MUSTER 1 FÜR DIE ABITURPRÜFUNG AM BERUFLICHEN GYMNASIUM AB DEM SCHULJAHR 2016/2017

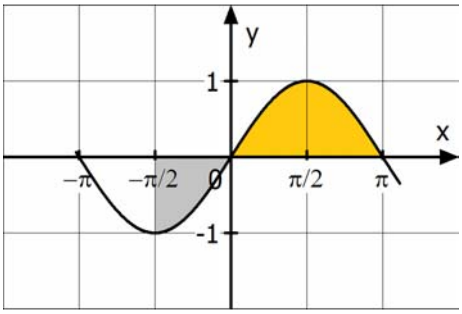
Hauptprüfung	**LÖSUNGSVORSCHLAG FÜR DAS FACH**
	Mathematik

Arbeitszeit	270 Minuten		
Hilfsmittel	**Teil 1:** Keine Hilfsmittel zugelassen. **Teil 2, Teil 3 und Teil 4:** Merkhilfe sowie eingeführter wissenschaftlicher Taschenrechner sind zugelassen.		
Stoffgebiet	**Teil 1:**	Analysis, Stochastik und Vektorgeometrie bzw. Matrizen (4 Aufgaben)	S. 2 - 5
	Teil 2:	Analysis (1 Aufgabe)	S. 6
		Anwendungsorientierte Analysis (3 Aufgaben)	S. 7 - 9
	Teil 3:	Stochastik (2 Aufgaben)	S. 10 - 11
	Teil 4:	Vektorgeometrie (1 Aufgabe)	S. 12
		Matrizen (1 Aufgabe)	S. 13
Bemerkungen	**Lösungsvorschlag** **nur für die Fachlehrerin/den Fachlehrer bestimmt**		

Punkte

1 Analysis

1.1 Skizze: 3



Die Fläche oberhalb der x-Achse ist größer als die Fläche unterhalb der x-Achse. Daher ist das Integral positiv.

1.2 Aussagen über das Schaubild von f: Das Schaubild besitzt den Hochpunkt $H\left(-2 \,\middle|\, \frac{19}{3}\right)$ und den Tiefpunkt $T\left(1 \,\middle|\, \frac{11}{6}\right)$. 4

1.3 Periode: p = π 4

Mit der Substitution $2x = a$ erhält man die Gleichung $\cos(a) = -1$.

Eine Lösung dieser Gleichung ist $a = \pi$. Mit $2x = \pi$ ergibt sich $x = \frac{\pi}{2}$.

1.4 5

	Schaubild von f	Schaubild von f'	Schaubild von f''
1.	A	E	I
2.	D	C	H
3.	G	B	F

16

Punkte

2 Stochastik

2.1 B: Bild, Z: Zahl. Ereignis A: Zweimal Z und einmal B. 2

$$P(A) = P(BZZ) + P(ZBZ) + P(ZZB) = 3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3}{8}.$$

2.2 Gegenereignis: In einer Gruppe von fünf Freunden hat mindestens eine Person die Blutgruppe null. 2

2.3 $E(X) = 0{,}2$ 3

$-3 \cdot 0{,}2 - u + 5 \cdot 0{,}2 = 0{,}2 \quad \Leftrightarrow \quad u = 0{,}2$

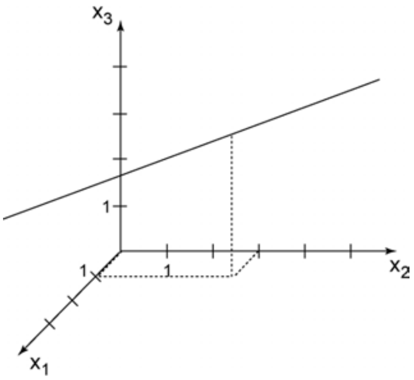
Ferner gilt: $0{,}2 + 0{,}2 + w + 0{,}2 = 1$. Somit ist $w = 0{,}4$.

7

Punkte

3 Vektorgeometrie

3.1 4



Die Gerade g verläuft parallel zur x_1x_2-Ebene.

3.2 3

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 1 & 2 & 1 & 8 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 10 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 3 & 0 & 7 \end{array}\right)$$

Die zweite Zeile liefert $x_2 = 1$, die dritte Zeile jedoch $x_2 = \frac{7}{3}$.

Aus diesem Widerspruch folgt, dass das LGS unlösbar ist.

7

Punkte

4 Matrizen

4.1 $M = \begin{pmatrix} 0,7 & 0,2 \\ 0,3 & 0,8 \end{pmatrix}$ 4

Die Elemente in der Hauptdiagonalen von M^2 geben die Wahrscheinlichkeit an, dass ein Kunde zwei Wochen später wieder den gleichen Saft kauft.

4.2 $(E - A) \cdot \vec{x} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 0,2 & -0,6 \\ -0,2 & 0,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ 3

$\Leftrightarrow \; 0,2\,x_1 - 0,6\,x_2 = 0 \;\wedge\; -0,2\,x_1 + 0,6\,x_2 = 0$

Folglich gilt: $x_1 = 3\,x_2$ und $x_2 = u$; $u \in \mathbb{R}$.

Somit ergibt sich: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3u \\ u \end{pmatrix}$, $u \in \mathbb{R}$.

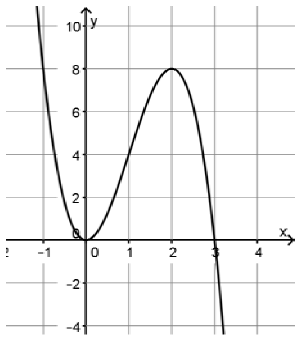
7

Punkte

1.1 Am Funktionsterm von f kann man erkennen: 2
einfache Nullstelle $x_1 = 3$, doppelte Nullstelle $x_{2,3} = 0$

Abb. A zeigt eine einfache Nullstelle bei $x = 0$, stellt also nicht K dar. 3
Abb. B zeigt eine Nullstelle bei $x = -3$, stellt also nicht K dar.
Abb. C kann K zeigen, da alle o.g. Eigenschaften gegeben sind.

Mit dieser Skalierung zeigt Abb. C die Kurve K. 1



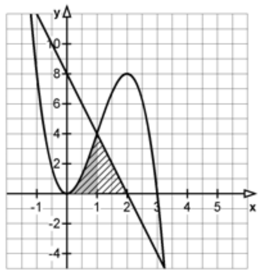
1.2 $$A = \int_0^3 (-2x^3 + 6x^2)dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 + 2x^3 \right]_0^3 = -\frac{1}{2} \cdot 81 + 2 \cdot 27 = 13{,}5$$ 5
Der Flächeninhalt beträgt 13,5 FE.

1.3 $h(x) = -4x + 8$ 5
Nullstelle von h: $h(x) = 0 \Leftrightarrow x = 2$
Schnittstelle von Gerade und Parabel: $x = 1$ (abgelesen)

Teilfläche 1:

(Summe aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [0;1] und dem Flächeninhalt des Dreiecks):

$$A = \int_0^1 f(x)dx + \frac{1}{2}(2-1) \cdot 4$$



Alternative Teilfläche: Differenz aus dem Inhalt der Fläche zwischen K und der x-Achse über [1;3] und dem Flächeninhalt des Dreiecks: $A = \int_1^3 f(x)dx - \frac{1}{2}(2-1) \cdot 4$

1.4 1. Falsch, da Linkskrümmung an der Stelle x = 3, also $g''(3) > 0$ 4

2. Wahr, da Hochpunkt bei x = 1

3. Falsch, da Wendepunkt mit Wechsel von Rechts- auf Linkskrümmung

4. Wahr, da $g'(3) = 0$ und durchschnittliche Änderungsrate in [1; 2] negativ

20

Punkte

2.1 x: Tage ab 1. Januar 6

s(x): Astronomische Sonnenscheindauer in Stunden

$s(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$

21.6 : x = 172 H(172|16,5)

21.12: x = 355 T(355|8)

Mittelwert: $d = \frac{16{,}5+8}{2} = 12{,}25$

Amplitude: $a = 16{,}5 - 12{,}25 = 4{,}25$

Periode (ein Jahr mit 365 Tagen): p = 365, $b = \frac{2\pi}{365}$

Verschiebung in x-Richtung: $355 - 365 = -10 \Rightarrow c = \frac{172 + (-10)}{2} = 81$

$s(x) = 4{,}25 \cdot \sin(\frac{2\pi}{365}(x-81)) + 12{,}25$

2.2 Die quadratische Näherung von Tina ist zur Modellierung ungeeignet, da eine Parabel keine zwei Extrempunkte und keine Wendepunkte besitzt. Die Funktion beschreibt die Punktmenge nicht so gut, wie man am Bestimmtheitsmaß $r^2 = 0{,}8745$ erkennen kann. 4

Toms Näherung beschreibt die Punktemenge besser, da das Bestimmtheitsmaß sehr nahe bei 1 liegt.

Da sich die Sonnenscheindauer als Differenz zwischen Sonnenaufgang und Sonnenuntergang ergibt, ist diese für jedes Jahr gleich.

Toms Näherungsfunktion mit der Definitionsmenge [0 ; 365] ist für jedes Jahr geeignet.

10

Punkte

3.1 $100\frac{km}{h} = 100\frac{1000\,m}{3600\,s} \approx 27{,}8\frac{m}{s}$ 4

$v(t) = \frac{100}{3{,}6}$

$\Leftrightarrow \; 70 - 70e^{-0{,}313t} = \frac{100}{3{,}6}$

$\Leftrightarrow \; e^{-0{,}313t} = \frac{70 - \frac{100}{3{,}6}}{70}$

$\Leftrightarrow \; t = -\ln\left(\frac{70 - \frac{100}{3{,}6}}{70}\right) : 0{,}313 \approx 1{,}62$

Nach etwa 1,6 Sekunden hat das Fahrzeug die Geschwindigkeit 100 $\frac{km}{h}$ erreicht.

3.2 $\bar{v} = \frac{1}{8{,}75} \cdot \int_0^{8{,}75} v(t)\,dt = \frac{1}{8{,}75} \cdot \left[\frac{70}{0{,}313}e^{-0{,}313t} + 70t\right]_0^{8{,}75}$ 6

$\approx 46{,}09$

Die Durchschnittsgeschwindigkeit betrug ca. 46 $\frac{m}{s}$.

$s = \bar{v} \cdot t \approx 46{,}09 \cdot 8{,}75 \approx 403{,}3$

Die Rennstrecke ist etwa 403 m lang.

10

Punkte

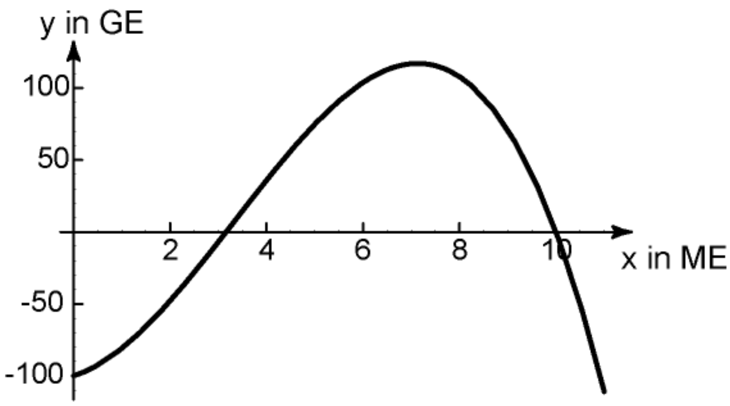
4.1 Erlösfunktion: $E(x) = 50 \cdot x$ 4

Gewinnfunktion: $G(x) = E(x) - K(x) = -x^3 + 10x^2 + 10x - 100 \quad (0 \le x \le 11)$

$K'(x) = 3x^2 - 20x + 40$

Da die Diskriminante D < 0 ist, hat K'(x) keine Nullstelle.
Da außerdem K'(0) = 40 > 0 ist, gilt: K'(x) > 0 für alle x-Werte.
Daher ist K streng monoton steigend, d.h., mit steigender Produnktionsmenge steigen stets die Kosten.

4.2 Mittels einer Wertetabelle erhält man das Schaubild: 4



Die Gewinnzone ist somit der Bereich $\sqrt{10} \le x \le 10$.

4.3 An der Wendestelle u des Schaubilds SK ist der Kostenzuwachs am kleinsten. 2

Mittels der Bedingung $K''(u) = 0$ erhält man $u = \dfrac{10}{3}$.

Wegen $K'''(\frac{10}{3}) > 0$ ist bei einer Produktionsmenge von $\dfrac{10}{3}$ ME der Kostenzuwachs minimal.

10

Punkte

1.1 $P(A) = 3 \cdot 0,2 \cdot 0,8^2 = 0,384$ 3

$P(B) = 1 - 0,8^7 \approx 0,79$

1.2 C: Anton erhält eine Rückerstattung. 4

D: Anton erlebt genau drei Sturmtage.

$P(C) = 1 - P(\overline{C})$ mit $\overline{C}$: weniger als drei Sturmtage

$$P(\overline{C}) = 0,8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0,2 \cdot 0,8^6 + \binom{7}{2} \cdot 0,2^2 \cdot 0,8^5 \overset{(WTR)}{\approx} 0,852 \Rightarrow P(C) \approx 0,148$$

$$P(D) = \binom{7}{3} \cdot 0,2^3 \cdot 0,8^4 \overset{(WTR)}{\approx} 0,115$$

Damit: $P_C(D) = \dfrac{P(C \cap D)}{P(C)} = \dfrac{P(D)}{P(C)} \approx \dfrac{0,115}{0,148} \approx 0,775$

Der Gast hat mit einer Wahrscheinlichkeit von 77,5 % genau drei Sturmtage erlebt, falls er eine Rückerstattung erhalten hat.

1.3.1 Der Hotelier kann den Erwartungswert μ für eine Bernoulli-Kette mit der „Trefferwahrscheinlichkeit“ p = 0,2 und der Anzahl n = 310 an Januartagen bilden: $\mu = n \cdot p = 62$. 2

1.3.2 X: Anzahl der Sturmtage 2

$$P(X < 50) = \sum_{i=0}^{49} \binom{310}{i} \cdot 0,2^i \cdot 0,8^{310-i} \overset{(WTR)}{\approx} 0,0352$$

Mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 3,5 % rentiert sich das Angebot nicht.

1.4 95 % Konfidenzintervall bezüglich h = $\dfrac{96}{120} = 0,8$: 4

$$\left[0,8 - 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}};\ 0,8 + 1,96 \cdot \frac{\sqrt{0,8 \cdot 0,2}}{\sqrt{120}}\right] \approx [0,728;\ 0,872]$$

15

Punkte

2.1 $P(A) = 0{,}8^7 \approx 0{,}21$ 5

$P(B) = 0{,}8^3 \cdot 0{,}2^2 \cdot 0{,}8^2 \approx 0{,}0131$

$\overline{C}$: höchstens ein Sturmtag. $P(\overline{C}) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 \overset{(WTR)}{\approx} 0{,}577$

$\Rightarrow P(C) = 1 - P(\overline{C}) \approx 0{,}423$

2.2 5

Zufallsvariable X: Einnahmen des Hoteliers

x_i	500	300
$P(X = x_i)$	0,852	0,148

mit $P(X = 500) = 0{,}8^7 + \binom{7}{1} \cdot 0{,}8^6 \cdot 0{,}2 + \binom{7}{2} \cdot 0{,}8^5 \cdot 0{,}2^2 \approx 0{,}852$

Wegen $0{,}852 \cdot 500\,€ + 0{,}148 \cdot 300\,€ = 470{,}4\,€ > 460\,€$ kann der Hotelier die Rückerstattung erhöhen.

2.3 In dem Schaubild wird die Wahrscheinlichkeit dargestellt, nach x Urlaubstagen höchstens einen Sturmtag zu erleben. 5

Diese Wahrscheinlichkeit soll mindestens 0,6 betragen, wobei gleichzeitig die Anzahl der Urlaubstage maximiert werden soll.

Aus dem Schaubild entnimmt man, dass man maximal sechs Urlaubstage buchen darf.

15

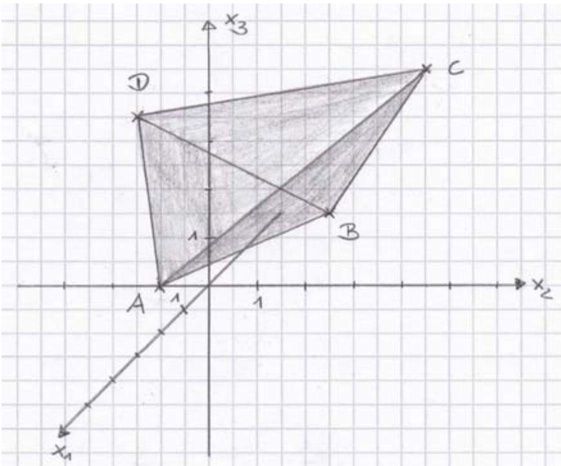
Punkte

Vektorgeometrie:

1.1 $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ 3

Da $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = 0$, liegt bei B ein rechter Winkel vor.

1.2 4



Die Punkte A und D liegen in der x_1x_3-Ebene.

1.3 8

Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Normalenvektor von E: $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ -13 \end{pmatrix}$

Es ergibt sich die Koordinatendarstellung von E : $6x + 9y - 13z = -1$

Falls P' Spiegelpunkt von P bezüglich E ist, so muss gelten:

1.) $\overrightarrow{P'P}$ und $\vec{n}$ sind kollinear
2.) Der Punkt Q in der Mitte von P' und P liegt in E

$\overrightarrow{P'P} = \begin{pmatrix} 12 \\ 18 \\ -26 \end{pmatrix} = 2 \cdot \vec{n}$ $\Rightarrow$ Die 1. Bedingung ist erfüllt.

Einsetzen der Koordinaten von $Q(0,5\,|\,1\,|\,1)$ in E ergibt: $6 \cdot 0,5 + 9 \cdot 1 - 13 \cdot 1 = -1$ Also liegt Q in E und damit ist auch die 2. Bedingung erfüllt.

Damit ist P' Spiegelpunkt zu P bezüglich der Ebene E.

15

Punkte

Martizen:

1.1 4

Übergangsmatrix $U = \begin{pmatrix} 0,4 & 0,2 & 0,1 \\ 0,5 & 0,7 & 0,5 \\ 0,1 & 0,1 & 0,4 \end{pmatrix}$

$$U \cdot \begin{pmatrix} 1000 \\ 1000 \\ 800 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 680 \\ 1600 \\ 520 \end{pmatrix}$$

Von A werden 680, von B 1600 und von C 520 Haushalte beliefert.

1.2.1 Für u = 0,1 gilt v + w = 0,9. 4
v und w können Werte aus dem Intervall [0; 0,9] annehmen.
Dabei gilt w = 0,9 – v.

Die Zahl 0,6 in der Tabelle bedeutet, dass 60 % der Kunden von B nicht wechseln, während nur 30 % der Kunden von A bei A bleiben.
Daher ist es angemessen, von größerer Kundentreue bei den Kunden von B zu sprechen.

1.2.2 7

$\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ 3x \\ x \end{pmatrix}$; Die Spaltensumme ist 1, deshalb gilt $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 0,3 & 0,2 & u \\ 0,6 & 0,6 & v \\ 0,2 & 0,2 & w \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,2 \\ 0,6 \\ 0,2 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0,18 + 0,2\,u = 0,2 \\ 0,46 + 0,2\,v = 0,6 \\ 0,16 + 0,2\,w = 0,2 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow$ u = 0,1 ; v = 0,7 ; w = 0,2

15